ENSAIT Roubaix
1ère épreuve

Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[-1\ +1]$ à valeurs réelles.
$\mathcal{P}_m$ le $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{C}$, engendré par les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n $(n \in \mathbb{N})$.

- I -

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer, en utilisant la formule de Moivre, que $\cos n\theta$ peut s'exprimer sous la forme d'une fonction polynôme de la variable $\cos\theta$.

b) On appelle fonction polynôme de Tchebichev de degré n, la fonction $T_n : [-1\ +1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$. Utiliser a) pour exprimer $T_n(x)$ sous forme d'une somme de fonctions polynômes de x. Expliciter le coefficient du terme de plus haut degré de T_n.

c) Expliciter T_n pour $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

2) Montrer que les polynômes de Tchebichev vérifient la relation suivante :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in [-1\ +1]\ ,\ T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

3) a) Montrer que, pour n supérieur ou égal à 1, la fonction polynôme T_n admet, dans l'intervalle $]-1\ +1[$ n racines notées y_0 , y_1 , ... y_{n-1} que l'on déterminera.

b) Montrer que, pour n strictement supérieur à 1, la fonction polynôme T'_n admet, dans l'intervalle $]-1\ +1[$ (n-1) racines notées z_1, z_2, ... z_{n-1} que l'on déterminera.

c) Pour n strictement supérieur à 1, exprimer :

$$T_n(z_k) \qquad k \in \{1 ; 2 ; \ldots ; (n-1)\}$$
$$T'_n(y_k) \qquad k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; (n-1)\}$$

4) Montrer que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{T_n(x)}$ est de la forme :

$$\frac{1}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{A_k}{(x-y_k)}$$

où les A_k sont des nombres réels que l'on explicitera en fonction de $T'_n(y_k)$.

5) Montrer que T_n vérifie la relation suivante, dans laquelle pour i = 0, 1, 2, a_i est un élément de $\mathcal{P}_i$, dont les coefficients peuvent dépendre de n.

$$a_2(x)\ T''_n(x) + a_1(x)\ T'_n(x) + a_0(x)\ T_n(x) = 0$$

- II -

1) Soient P, Q deux éléments de $\mathcal{P}_m$

a) Montrer que l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

b) Montrer que l'on définit sur $\mathcal{P}_m$ un produit scalaire euclidien en associant à tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathcal{P}_m$, le réel noté $\langle P , Q \rangle$ défini par :

$$\langle P , Q \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

2) Calculer

a) $\langle T_n, T_m \rangle$ $n \neq m$

b) $\langle T_n, T_n \rangle$ $n \neq 0$

c) $\langle T_o , T_o \rangle$

3) a) Montrer que (T_k) $k \bullet \{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_m$.

b) Déterminer une base (u_k) $k \in \{0 ; 1 ; \ldots ; n\}$ qui soit une base orthonormée de $\mathcal{P}_m$.

c) Dans le cas n = 3, expliciter la base orthonormée (u_k) $k \bullet \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$